

RACIOCÍNIO HEURÍSTICO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

José Lafayette de Oliveira Gonçalves¹

Resumo: Não existe uma única maneira correta de ensinar a resolver problemas e seria presunção de minha parte recomendar pelo menos uma. Existem tantas maneiras de ensinar com sucesso o aluno a pensar matematicamente, como existem professores de talento. Os métodos empregados em sala de aula são uma questão de estilo pessoal. O que funciona com um professor, pode ser que com outro tenha que ser modificado. As idéias e sugestões que apresento neste artigo sempre funcionaram razoavelmente, na minha caminhada como educador matemático. Estudando-as com atenção e rigor, pode ser que seja possível ao leitor adaptá-las ao seu trabalho docente.

Palavras-chave: raciocínio, heurística, problemas rotineiros e não rotineiros e investigação.

INTRODUÇÃO

Examinemos o problema:

Um disco voador, vindo de outro planeta, deixou cair na Terra uma estranha caixa contendo 141 pequenas cápsulas e com a inscrição

۷ ۷

Pesquisas posteriores mostraram que tal inscrição era o numeral mais simples representativo da quantidade de cápsulas na caixa, e que o sistema de numeração usado no planeta era de base SEIS e seus numerais mais simples tinham as mesmas regras de formação que os nossos. Estudando a MATEMÁTICA daquele povo, verificou-se que ele efetuava uma adição com o mesmo artifício de cálculo que fazemos nós na Terra; serviu de exemplo a “conta” que se encontrou num manuscrito

۶ ۷

۷ ●

¹ Mestre em Educação Matemática - IGCE-UNESP-Rio Claro, SP.

ז ב נ י

Mais tarde uma outra caixa daquelas veio com o numeral mais simples

ב • ז נ

Quantas cápsulas havia nessa outra caixa?

Sabemos que a resolução desse problema proposto não é trivial. Para resolvê-lo, vamos, através desse artigo, tentar expor, teoricamente, algumas justificativas que poderão contribuir significativamente.

Alguns educadores citam resolução de problemas como o principal objetivo da aprendizagem da Matemática

“Principal justificativa para estudar matemática na escola primária é sua utilidade em resolução de problemas”. (Begle – 1979)

“Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente, outros objetivos na matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos, através de um conhecimento significativo e habilidoso, é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos é ser capaz de usá-los na construção das situações-problema”.

(L. Hatfield – 1980).

Resolução de problemas é, também, interpretada como o processo de selecionar e aplicar pré-requisitos a uma situação problema com o fim de resolvê-la.

“O indivíduo necessita e reúne pré-requisitos e usa-os na resolução de um problema. Ao resolvê-lo aprende algo novo. Este é o processo”. (Robert Gagné)

Nessa interpretação como um processo, o que é considerado mais importante são os procedimentos e as estratégias que o indivíduo utiliza para resolver os problemas do que a solução em si mesma.

Resolução de problemas só poderá ser realizada, ou seja, o aluno só terá a chance de buscar suas próprias estratégias e procedimentos se for permitido que ele seja um agente ativo dessa busca. É preciso que o resolvidor seja engajado num processo mental de modo a desenvolver suas próprias estratégias cognitivas.

Quando o aluno resolve um problema, ele sempre experimenta a sensação da descoberta na solução do problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafia a curiosidade do aluno aguçando o inventor que há dentro dele e resolvendo com seus próprios recursos, ele pode experimentar a tensão e satisfação do triunfo da descoberta.

Essas experiências, desde muito cedo, podem criar um gosto para o trabalho mental e determinar a inteligência e o caráter do indivíduo para sua vida.

Uma das maiores dificuldades no ensino por meio de resolução de problemas é atingir o professor de modo que ele sinta necessidade numa mudança de atitude em relação ao processo de aprendizagem.

A nossa formação como professor é de uma escola onde o desenvolvimento do raciocínio e de um conhecimento organizado e significativo foi totalmente abandonado. O indivíduo é colocado, de um momento para outro, no papel de educador sem nenhum estudo ou instrumento para lidar com o educando tanto no aspecto intelectual quanto no afetivo. Fomos educados dentro de uma ideologia na qual se desenvolve adaptação e submissão e não confronto de pontos de vista e erros.

Se o professor não se propuser a uma transformação interior, a sua tendência será a de manter essa atitude e, conseqüentemente, educando pessoas que não desenvolvem nenhuma autonomia intelectual, moral e emocional.

DEFINIÇÃO DE PROBLEMA

Problema é uma situação que pede uma solução e esta não é óbvia. É uma situação à qual o repertório de respostas imediatamente disponível num sujeito não permite a solução do problema.

Segundo Jean Piaget, nas definições de problemas, duas precisões são freqüentemente omitidas:

1. Não podemos falar de um problema quando sua solução não é possível;
2. A solução deve ser obtida através de meios intelectuais.

Segundo alguns educadores e psicólogos, para que uma situação seja problema para um indivíduo, ele deve satisfazer a três critérios:

- a) **ACEITAÇÃO OU ENVOLVIMENTO:** o indivíduo sente desejo de resolver o problema; ele se envolve com o problema por uma motivação interna ou externa.
- b) **BLOQUEIO:** A solução não é imediata; com os modelos que ele tem, a solução não aparece.
- c) **EXPLORAÇÃO:** Existe um envolvimento pessoal que o leva a explorar o problema; faz tentativa deliberada a fim de achar a solução.

Essa última definição é muito apreciada pelos psicólogos, os quais estão muito



atentos ao estudo de resolução de problemas. Apesar de também apreciá-la, sinto que o critério “aceitação” deixa o professor um pouco limitado na escolha dos problemas que vai apresentar numa sala de aula comum. Uma recomendação seria a de estar atento aos problemas que despertam o desejo da solução e guardá-los para o nosso acervo de problemas.

ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DE UM BOM PROBLEMA

- Envolve o aluno e o desenvolve.
- Desperta interesse e motivação: Excita a descobrir a resposta.
- O aluno aprende algo quando o resolve. A solução do problema envolve um conceito matemático novo.
- É matematicamente significativa.
- É um problema claro e fácil de entender.
- Envolve ação ou simulação de situações reais.
- Pode ser generalizado. Dá oportunidade para várias soluções.
- Deve ser desconhecido e não deve ser resolvido por um simples algoritmo.
- Curto em cálculo, longo em pensamento lógico.
- Vocabulário e simbologia familiares ao aluno.
- Deve ser suficientemente fácil para obter sucesso, mas propor desafio.

Certamente os problemas que escolheremos ou criaremos não terão todas essas características, mas devemos estar atentos para que algumas estejam presentes ou se eles não estão reforçando o contrário das mesmas.

DISTINÇÃO ENTRE EXERCÍCIOS, PROBLEMAS ROTINEIROS E NÃO ROTINEIROS OU PROCESSOS

Exercício

É uma situação em que há um procedimento determinado para chegar à resposta.

O aluno tem um procedimento padrão para resolvê-lo. Eles são resolvidos numa seqüência de passos.

Exemplos: Calcule: $16 + 4(-2) - (6 - 3)$

Resolva: $5x^2 - 3x - 5 = 0$



Problemas Rotineiros

São os problemas padrões que, geralmente, aparecem nos livros. A tarefa básica para resolvê-los é identificar quais operações ou algoritmos são mais apropriados.

Os problemas rotineiros de um modo geral:

- não desafiam o aluno.
- não exigem um plano de pensamento e não desenvolvem um novo conhecimento.
- são resolvidos pela aplicação direta de um algoritmo.
- são usados pelos livros para controlar conhecimentos.

Os propósitos dos problemas rotineiros são:

- melhorar e recordar os fatos básicos.
- fortalecer habilidades nos algoritmos das operações fundamentais.
- reforçar as relações entre as operações e suas aplicações nas situações do dia a dia.

Problemas processos ou não rotineiros

Os problemas não rotineiros são aqueles que exigem o uso de estratégias ou alguma tentativa que não seja um algoritmo ou uma equação.

Os problemas não rotineiros ou processos, em geral:

- exigem o uso de estratégia, ou seja, um plano de pensamento.
- podem ser resolvidos por um algoritmo ou equação, mas estes não são conhecidos do aluno daquela faixa etária.
- tem mais de uma solução.
- levam a um novo conhecimento quando resolvidos.

Os propósitos dos problemas processos são:

- desenvolver e praticar estratégias.
- desenvolver a consciência dos alunos das estratégias em resolução de problemas.



- dar a oportunidade para os alunos dividirem seus métodos com os outros.
- obter confiança e gosto em resolução de problemas.
- fazer o aluno perceber a importância de abordar problemas de uma maneira sistemática.

Esse tipo de problema explora o processo de obter a solução em vez da solução por si mesma.

A recomendação é que os problemas que colecionaremos para propor aos alunos sejam problemas processos. Os problemas rotineiros podem estar entre esses com os objetivos de sucesso citados acima.

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A seguir apresentamos alguns dos métodos comuns que usamos para resolver problemas:

- tentativa e erro.
- tentar um problema mais simples.
- pensar na solução de um problema semelhante ou análogo.
- desenhar uma tabela ou diagrama.
- procurar um modelo.
- estudar casos especiais.
- escrever uma equação ou operação.
- estimular e tentar a possível solução.
- trabalhar o problema de trás para diante.
- fazer um desenho.

Esses são alguns caminhos ou estratégias que as pessoas usam para resolver problemas.

Alguns educadores chamam esses meios de HEURÍSTICAS.

Heurísticas são regras, sugestões, guias ou técnicas que podem ser úteis em fazer progresso na direção da solução do problema.

Heurística era o nome de um ramo do estudo da Lógica, Filosofia ou Psicologia que estuda os métodos e regras do descobrimento e da invenção.

Polya denomina heurística moderna o estudo que procura compreender o processo solucionador de problemas; em particular as operações mentais, típicas desse processo que foram úteis.



RACIOCÍNIO HEURÍSTICO é o raciocinar não com um fim rígido, mas com um final razoável e provisório cujo propósito é descobrir a solução do problema atual. Heurístico contrasta-se com algoritmo. Não há procedimento fixo que, se seguido passo a passo garante o sucesso na condução da tarefa. Logo, precisamos ser cautelosos ao estabelecer um número preciso de passos para resolver problemas.

A organização nas quatro fases apresentadas por Polya pode ser também considerada uma heurística. Ela não funciona sempre, mas é uma organização freqüentemente bem sucedida em Resolução de Problemas.

Como parte do extensivo, é preciso estudo e investigação em Resolução de Problemas; George Polya desenvolveu um processo de quatro fases semelhante ao apresentado abaixo.

Em cada uma das fases, ele apresenta Heurísticas que são afixadas em forma de sugestões e questões.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- a) Você pode relatar o problema com suas próprias palavras?
- b) O que é procurado?
- c) Que informação você obtém do problema?
- d) Que informação, se existe, está faltando ou não é necessária?
- e) Você poderá estimular a resposta?

ELABORAÇÃO DE UM PLANO

- a) Você já resolveu um problema semelhante a esse, antes? Já viu um problema semelhante ou análogo que lhe poderia ser útil?
- b) Organize suas informações numa tabela, gráfico ou diagrama.
- c) Procure um modelo - que simetrias ou relações você pode ver?
- d) Trabalhe no problema por partes.
- e) Procure um problema mais simples.
- f) Tente escrever uma sentença matemática.
- g) Use tentativa e erro.

EXECUÇÃO DO PLANO

- a) Execute o seu plano de resolução verificando cada passo.
- b) Resolva a sentença matemática.
- c) Complete o seu diagrama. Tente determinar seu esquema.



d) Faça cálculos necessários.

RETROSPECTO (LOOKING BACK)

- a) Confira os resultados no problema original.
- b) Há alguma outra solução? Há outra maneira de achar a resposta?
- c) Você pode resolver outro problema semelhante a esse resolvido?
- d) Você pode generalizar o problema? Por exemplo, você pode determinar o problema para os “n” pontos?
- e) Você pode criar um problema semelhante a este que você resolveu? Mais fácil? Mais difícil?
- f) Você pode usar esse problema para introduzir um conceito ou conteúdo matemático?

RETROSPECTO ou revisar o problema significa examinar a solução obtida, pensar nos recursos do resolvidor para resolver o problema: seus argumentos, seus métodos e o que ele aprendeu com o problema.

Freqüentemente nós aprendemos mais sobre o problema, fazendo um retrospecto do que através da solução do problema.

FATORES QUE CONTRIBUEM PARA A APRENDIZAGEM

Alguns fatores da aprendizagem potencialmente importante que podem resultar no crescimento do aluno como um bom resolvidor de problemas em matemática são colocados a seguir:

Para Larry Hatfield, as recomendações abaixo são significativas:

1. Os alunos devem enfrentar os problemas por eles mesmos.
2. Evite revelar o caminho da solução, prematuramente, durante o estudo do problema. Use técnicas, ou seja, boas questões para ajudar os alunos a construir suas próprias soluções. Cuidadosamente, forneça dicas ou sugestões em pontos críticos a fim de manter a persistência e “insight” do resolvidor.
3. Esteja atento para tratar a maior parte do currículo através da resolução de problemas.

Transforme explicações de “informar” numa descoberta orientada através de



abordagens como “what if” e “how come”.

Adote e defenda a filosofia que matemática é uma resposta sensível a uma situação razoável. Aproveite situações que levam a adquirir conceitos, generalizações e algoritmo, os quais estimulam o processo construtivo nos estudantes.

4. Pense na heurística que foi útil nos seus esforços em resolver o problema. Quando engajar os estudantes numa situação problema, use uma ajuda heurística, identificando-a claramente nas duas diferentes fases, ou seja, de resolver e de revisar o caminho que levou à solução. Ajude os alunos a pensar em “ajudar” a eles mesmos, usando técnicas de questões orientadas, heurísticamente, nas suas aulas.

5. Estude seus problemas do ponto de vista de ajuda do potencial heurístico que pode ser encontrada e aprendida através das resoluções apresentadas pelos estudantes (Dê aos alunos uma variedade de experiências de resoluções para praticar e assimilar o conhecimento da heurística em matemática).

6. Comunique, claramente, aos estudantes do empenho necessário e esforço para se tornar um bom solucionador de problemas. Demonstre o valor que você dá à maneira de solucionar problemas incluindo isso na sua avaliação dos alunos. Meça seu sucesso como professor de resolução de problemas com critério: nenhum aluno deixará de resolver problemas porque você lhe deu muitos exemplos nos quais ele poderá se basear. Procure e selecione problemas de várias fontes. Aprenda a criar seus próprios desafios sistemáticos. Encoraje os alunos a trazer problemas difíceis para você e para os colegas.

7. Aprender é um processo construtivo, tente olhar seus alunos desse modo. Estude como as idéias deles se formam e se modificam. Pense sobre como seus alunos estão formando idéias sobre aprender como aprender. Aconselhe-os sobre algumas estratégias de como aprender. Defenda a resolução de problemas matemáticos como sendo um contexto para praticar processos construtivos.

8. Ajude os alunos a conhecer o prazer na resolução de problemas. Mostre que essa resolução de problemas é necessária na vida de cada um. Dirija os alunos no sentido de reconhecer e assumir a responsabilidade por suas próprias escolhas na aceitação e resolução dos problemas. Mostre aos alunos o valor de enfrentar desafios que exigem grandes esforços. Mostre o que pode ser aprendido por tentar, mesmo sendo muito difíceis de serem solucionados.

INVESTIGAÇÃO E CONCLUSÕES EM RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS



1. AMPLIAR A NOÇÃO DE PROBLEMA

ANTES: O problema era usado para aplicar e controlar conhecimento. Problemas Estereotipados (aplicação direta de equação ou algoritmo resolverá o problema).

FUTURO: Utilizar problemas variados do tipo problema processo e evitar os problemas rotineiros e estereotipados.

Problema processo explora mais o processo de obter a solução por si mesma; exige o uso de uma ou mais estratégias para resolvê-lo.

2. O PROFESSOR DEVE TER CLARO, QUAIS OS OBJETIVOS DOS PROBLEMAS

UTILIZADOS NO CURSO

- a) investigação (desenvolve atitude de pesquisa).
- b) exploração (desenvolve estratégias cognitivas).
- c) aplicação.

3. APRESENTAÇÃO DOS PROBLEMAS

- cuidado com ambigüidades.
- linguagem clara e simples.
- subdividir o problema.
- evitar problemas que traduzam uma situação pseudoconcreta ou socialmente antipática.
- usar o próprio ambiente para criar o problema (motivação)
- jogos e situações fantásticas.

4. UTILIZAR, ÀS VEZES, PROBLEMAS ABERTOS OU MAL DEFINIDOS OU COM

INFORMAÇÕES SUPÉRFLUAS

5. A ATITUDE DO PROFESSOR durante e depois da resolução do problema é



determinante.

- um resolvidor de problemas entusiasmado.
- facilitador ou moderador de idéias e não um instrutor.
- atitude de coerência e persistência frente à classe.
- permitir o “fazer matemática” e não o “observar matemática” sendo feita.

ASPECTOS DIDÁTICOS NA APLICAÇÃO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1. Os alunos devem enfrentar os problemas sozinhos - o professor não deve apresentar caminhos antes do aluno ter explorado o problema.
2. Se necessário, o professor deve ajudar na compreensão do problema (dados, incógnita, vocabulário) com o cuidado de não indicar caminhos ou destacar perguntas chaves.
3. Enquanto os alunos procuram a solução, o professor poderá “circular” pela classe servindo de “consultor” com o fim de garantir um procedimento razoável. Sentindo que o aluno ou o grupo de alunos quer sua atenção, verificar se o aluno é capaz de:
 - a. especificar em detalhes qualquer que seja a operação que ele está engajado.
 - b. justificar a razão por estar engajado nela.
 - c. dizer o que ele fará com o resultado, se a solução progride.
4. Após os alunos resolverem os problemas ou pelo menos terem procurado caminhos, o professor poderá apresentar uma estratégia (heurística) que usou na sua solução e sente que enriquecerá o aluno no seu potencial heurístico. Essa apresentação deve ser feita com a mesma seriedade e entusiasmo que o professor dedica a outras técnicas matemáticas.
5. Observar as estratégias usadas pelos alunos, e estudar os problemas através delas. O objetivo é:
 - a. perceber os pré-requisitos selecionados e aplicados pelos alunos daquela faixa etária.
 - b. observar o processo cognitivo e o enriquecimento das estratégias em resolução de problemas.
 - c. estudar como as idéias dos alunos se formam e se modificam dentro do processo construtivo da aprendizagem.
6. O professor deve promover o confronto de pontos de vista entre os alunos.



SUGESTÕES:

- a. Levar à lousa as diferentes estratégias que os alunos usaram na solução do problema.
 - b. Através de perguntas estimulantes, levar os alunos a contarem por que percorrem determinados caminhos e trocarem seus métodos com os outros.
-
7. O aluno deve sentir que é livre para cometer erros (auto-estima - perda de afeto com o erro). “Cuidar” do aluno “empacado” em Resolução de Problemas ou daquele mais inibido.
 8. Pedir aos alunos que tragam problemas para serem resolvidos em sala. Professor no papel de aluno.
 9. Iniciar com problemas que proponham desafios, mas sejam razoavelmente simples para garantir sucesso.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- KILPATRICK, J. — “Problem Solving and Creative Behavior in Mathematics”
- LINDQUIST, M. MARY - “Selected Issues in Mathematics Education” McCutchen Publishing Corporation, 1980.
- MACKILLIP, W.; COONEY, J. T.; DAVIS, J. E.; WILLIAN, W.J - “Mathematics Instruction in the Elementary Grades” - Silver Burdett Company, 1978.
- MASON, J.; BURTO, L.; STAVEY, K. - “Thinking Mathematically” Addison -Wesley Publishing Company.
- NCTM, 1980 - Yearbook - Problems Solving in School Mathematics.
- POLYA, G. - “A arte de resolver Problemas”. Editora Interciência - (1977). “How to solve it”, 1943.
- POLYA, G. - “Mathematical Discovery “. Vol. I, II. John Wilwy & Sons. (1962, 1965, 1981).
- RUDNICK, A. J. - “Problem Solving, a handbook for teacher”. Allyn and Bacon, Inc, 1980.
- SHOENFELD, H.A. — “Problem Solving in the Mathematics curriculum: a report, Recommendations and an annotated bibliography”, 1983.

Prof. José Lafayette de Oliveira Gonçalves
e-mail: netojales@yahoo.com.br
UNIJALES – Centro Universitário de Jales – Unidade Central
Fone (17) 3622-1620
Av. Francisco Jalles, n.º 1.851
CEP: 15700-000
Jales - SP